第27卷 第6期 2010年12月
工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS
Vol. 27 No. 6 Dec. 2010

文章编号:1005-3085(2010)06-1091-05

Hamilton-Jacobi 方程的对称约化和精确解*

勾 明, 王丽真, 屈长征

(西北大学数学系，西安 710069)

摘 要: 对称群法是研究非线性偏微分方程对称约化和精确解的有效方法。本文利用广义条件对称方法研究容许二阶广义条件对称的 Hamilton-Jacobi 方程。对一些类型的 Hamilton-Jacobi 方程，我们得到了该类方程的对称约化和精确解。

关键词: Hamilton-Jacobi 方程；广义条件对称 (CLBS)；精确解

分类号: **AMS**(2000) 35C05　　**中图分类号**: O175.2　　**文献标识码**: A

1 引言

Hamilton-Jacobi 方程在诸如古典力学、量子力学、控制论等等方面有广泛的应用。在许多不同的研究方向上已经发展了很多的数学理论关于 Hamilton-Jacobi 方程解的构造，粘性解的存在性，惟一性，解的奇性和间断等等[1]。值得注意的是，Hamilton-Jacobi 方程可以去描述非线性扩散方程的长时间行为，爆破率和几何性质[2]。研究 Hamilton-Jacobi 方程的解将有助于研究非线性扩散方程的性质。在过去的几十年里，有许多的方法被提出来研究非线性方程的精确解[3,4]，其中对称群法[5] 及广义条件对称法 (CLBS)[6] 已经被证明是寻找非线性偏微分方程的对称约化和精确解的有效方法。在本文中，我们研究 Hamilton-Jacobi 方程

$$u_t = u_x^{n+1} + B(u)u_x + C(u), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

允许特征为如下形式

$$\eta = u_{xx} + H(u)u_x^2 + F(u)u_x + G(u) \tag{2}$$

的广义条件对称的问题，其中 $n \in \mathbb{R}$，$B(u), C(u), H(u), F(u), G(u)$ 是 u 的充分光滑的函数。我们将利用广义条件对称法解出方程 (1) 和特征 (2) 中待定函数的表达式，并利用得到的特征将方程做约化，得到精确解。

方程 (1) 是更一般的 Hamilton-Jacobi 方程

$$u_t = f(u, u_x) \tag{3}$$

的一个特殊情况，其中 $f(u, u_x)$ 是一个关于 u 和 u_x 的光滑函数。

收稿日期: 2008-11-27. **作者简介**: 勾明 (1972年12月生)，男，博士，副教授. 研究方向：偏微分方程对称群和精确解.

***基金项目**: 国家自然科学基金 (10671156)；西北大学科研基金 (NC0922).

2 非线性发展方程的CLBS

首先，简要介绍一下对称群方法并给出关于非线性发展方程的CLBS的一些基本结果。

假设n-阶非线性发展方程的形式为

$$u_t = E(x,t,u,u_1,\cdots,u_n), \quad t\in\mathbb{R}^+, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{4}$$

其中$u_j=\partial^j u/\partial x^j$，在一个非李点无穷小变换群下

$$\begin{aligned}
u' &= u+\epsilon\eta(t,x,u,u_1,\cdots,u_N)+O(\epsilon^2),\\
u'_t &= u_t+\epsilon D_t\eta(t,x,u,u_1,\cdots,u_N)+O(\epsilon^2),\\
u'_x &= u_x+\epsilon D_x\eta(t,x,u,u_1,\cdots,u_N)+O(\epsilon^2),\\
&\cdots
\end{aligned}$$

是不变的，则称该变换为方程(4)所允许的群。这个群等价于一个演化的向量场

$$V=\sum_{k=0}^{\infty} D_x^k\eta\frac{\partial}{\partial u_k}, \tag{5}$$

其中η被称为V的特征。其中

$$D_x=\frac{\partial}{\partial x}+\sum_{k=0}^{\infty}u_{k+1}\frac{\partial}{\partial u_k}, \quad D_x^{j+1}=D_x(D_x^j), \quad D_x^0=1.$$

定义1 若$V(u_t-E)|_L=0$，其中L是方程的全部微分结果的集合，即

$$u_t-E=0, \quad D_x^jD_t^k(u_t-E)=0, \quad j,k=0,1,2,\cdots,$$

则向量场(5)被称为是方程(4)的Lie–Bäcklund对称。

定义2 若

$$V(u_t-E)|_{L\cap M}=0,$$

其中M是方程$\eta=0$关于x的全部微分结果的集合，即$D_x^j\eta=0$，$j=0,1,2,\cdots$，则向量场(5)被称为是方程(4)的CLBS。

命题1[6] 方程(4)容许CLBS(5)的充分条件是$D_t\eta=0$。

通过命题1我们发现计算CLBS本质上和计算Lie–Bäcklund对称的方法是一样的。即第一步是用V对(u_t-E)作用，这里的(u_t-E)被认为是一个关于自变量为t, x, u, u_t, u_1, $\cdots$, u_n的函数。第二步是通过方程$u_t-E=0$和$\eta=0$以及它们的微分结果

$$D_x^j(u_t-E)=0, \quad D_x^j\eta=0, \quad j=1,2,\cdots,$$

消去u_{tj}，$j=0,1,2,\cdots$和u_N, u_{N+1}, $\cdots$。第三步令这些结果为零就得到一个线性的PDEs系统，这个系统被称为决定方程组。解决定方程组就得到了CLBS中η的表达式。第四步令$\eta=0$，就可以将偏微分方程对称约化为常微分方程组，如果该常微分方程可以求解，我们就可以得到偏微分方程的精确解。

3　主要结果

以下是关于方程 (1) 的广义条件对称和精确解的结果。

命题 2　如果方程 (3) 容许特征是 $\eta = u_{xx} + g(u, u_x)$ 的 CLBS，则函数 $g(u, u_x)$ 和 $f(u, u_x)$ 满足条件

$$fg_u - gf_u - 2gu_x f_{uu_x} + g^2 f_{u_x u_x} + f_{uu} u_x^2 - g_u u_x f_{u_x} + f_u u_x g_{u_x} = 0. \tag{6}$$

证明　令 E 表示方程 (3) 的解流形。于是 $u \in E$ 意味着 u 满足方程 (3)。令 M 表示 $\eta = 0$ 的解的集合。对于 $u \in M \cap E$，我们有

$$u_{tx} = f_u u_x + f_{u_x} u_{xx} = f_u u_x - g f_{u_x} \equiv A(u, u_x), \quad u_{txx} = A_u u_x - g A_{u_x},$$

一个直接计算得

$$\begin{aligned} D_t \eta &= u_{txx} + g_{u_x} u_{xt} + g_u u_t \\ &= fg_u - gf_u - 2gu_x f_{uu_x} + g^2 f_{u_x ux} + f_{uu} u_x^2 - g_u u_x f_{u_x} + f_u u_x g_{u_x}. \end{aligned}$$

于是由命题 1，命题 2 得证。　**证毕**

根据命题 2，我们有下列新命题。

命题 3　如果方程 (1) 的容许特征为 (2) 的 CLBS，则函数 $B(u)$, $C(u)$, $H(u)$, $F(u)$ 和 $G(u)$ 满足条件

$$J_1 u_x^{n+3} + J_2 u_x^{n+2} + J_3 u_x^{n+1} + J_4 u_x^n + J_5 u_x^{n-1} + J_6 u_x^3 + J_7 u_x^2 + J_8 u_x + J_9 = 0, \tag{7}$$

其中

$$J_1 = -nH' + n(n+1)H^2, \quad J_2 = -nF' + 2n(n+1)FH,$$

$$J_3 = -nG' + n(n+1)F^2 + 2n(n+1)HG,$$

$$J_4 = 2n(n+1)GF, \quad J_5 = n(n+1)G^2, \quad J_6 = B'' - HB',$$

$$J_7 = C'' + (HC)' - 2FB' = 0, \quad J_8 = CF' - 3GB', \quad J_9 = CG' - GC',$$

这里及以后的 $'$ 表示关于指示变量的导数。

证明　在 (6) 中分别用

$$u_x^{n+1} + B(u)u_x + C(u), \quad H(u)u_x^2 + F(u)u_x + G(u)$$

取代 g 和 f，通过直接计算可以得到 (7)。　**证毕**

方程组 (7) 即为决定方程组。通过计算决定方程组 (7)，可以得到方程 (1) 和特征 (2) 中待定函数的表达式。我们将主要结果列在下面 (具体求解决定方程组的过程省略)。

命题 4　方程

$$u_t = u_x^2 + b_1 u u_x + (b_1 a_0 - a_0^2)u^2 + a_1 u + a_2, \tag{8}$$

容许特征 $\eta = u_{xx} + a_0 u_x$ 的 CLBS。

下面利用所得CLBS去约化方程和求精确解。方法是令$\eta = 0$，得方程(8)的解为$u = \alpha(t)\mathrm{e}^{-a_0x} + \beta(t)$，其中$\alpha(t)$和$\beta(t)$满足下列方程组

$$\alpha' = 2(b_1a_0 - a_0^2)\alpha\beta - b_1a_0\alpha + a_1\alpha, \quad \beta' = (b_1a_0 - a_0^2)\beta^2 + a_1\beta + a_2.$$

命题5 方程

$$u_t = u_x^2 + \big(4a_0u + 2b_1\sqrt{u}\,\big)u_x + 4a_0^2u^2 + 4a_0b_1u^{\frac{3}{2}} + 2a_1u + a_2\sqrt{u}, \tag{9}$$

容许特征为

$$\eta = u_{xx} - \frac{1}{2u}u_x^2 + a_0u_x$$

的CLBS。

令$\eta = 0$，得方程(9)的解为$u = [\alpha(t)\mathrm{e}^{-a_0x} + \beta(t)]^2$，其中$\alpha(t)$和$\beta(t)$满足下列方程组

$$\alpha' = 2a_0^2\beta^2\alpha + 2a_0b_1\alpha\beta + a_1\alpha, \quad \beta' = 2a_0^2\beta^3 + 2a_0b_1\beta^2 + a_1\beta + \frac{a_2}{2}.$$

命题6 方程

$$u_t = u_x^2 + b_1u^2u_x + \frac{1}{4}b_1u^4 + 2a_3u^2 + 2a_2 - \frac{1}{4}a_1u^{-2},$$

容许CLBS，其特征是

$$\eta = u_{xx} - \frac{1}{2u}u_x^2 + (a_1u^{-2} + b_1u)u_x + \frac{1}{8}b_1u^3 + a_3u + a_2u^{-1} - \frac{1}{8}a_1u^{-3}.$$

命题7 方程

$$u_t = u_x^{n+1} + a_1u^{\frac{n}{n+1}}u_x + b_1u + b_2u^{\frac{1}{n+1}}, \tag{10}$$

容许特征为

$$\eta = u_{xx} - \frac{1}{(n+1)u}u_x^2$$

的CLBS。

令$\eta = 0$，得方程(10)的解为$u = [\alpha(t)x + \beta(t)]^{\frac{n+1}{n}}$，其中$\alpha(t)$和$\beta(t)$满足方程组

$$\alpha' = \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n\alpha^{n+2} + a_1\alpha^2 + \frac{n}{n+1}b_1\alpha,$$

$$\beta' = \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n\alpha^{n+1}\beta + a_1\alpha\beta + \frac{n}{n+1}b_1\beta + \frac{n}{n+1}b_2.$$

4 总结

在本文中，我们研究了具有特定函数项$B(u)$和$C(u)$的Hamilton-Jacobi方程容许特征是二阶的CLBS问题，给出了对应方程解的结构的刻画。拓展这里的方法去研究高维Hamilton-Jacobi方程$u_t = H(u, |\nabla u|)$是一个有意义的方向。

参考文献：

[1] Crandall M G, Lions P L. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1983, 277: 1-42
[2] Galaktionov V A, Vázquez J L. Blow-up for quasilinear heat equations described by means of nonlinear Hamilton-Jacobi equations[J]. Journal of Differential Equations, 1996, 127: 1-40
[3] 尚亚东，郭柏灵. 一类拟线性拟抛物型积分微分方程的初边值问题[J]. 工程数学学报，2003, 20(4): 1-6
Shang Y D, Guo B L. Initial boundary value problem of integral-differential equations for a class of quasilinear of pseudoparabolic type[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2003, 20(4): 1-6
[4] 林彬，李开泰. 非线性微分方程的微分变换方法[J]. 工程数学学报，2009, 26(6): 1137-1140
Lin B, Li K T. Differential transformation method for solving nonlinear differential equations[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2009, 26(6): 1137-1140
[5] Bluman G W, Kumei S. Symmetries and Differential Equation[M]. New York: Springer, 1989
[6] Zhdanov R Z. Conditional Lie–Bäcklund symmetry and reductions of evolution equations[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 1995, 128: 3841-3850

Symmetry Reductions and Exact Solutions of Hamilton-Jacobi Equations

GOU Ming, WANG Li-zhen, QU Chang-zheng

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069)

Abstract: The symmetry group related methods have been proven to be effective to study the symmetry reductions and exact solutions of nonlinear partial differential equations. The conditional Lie-Bäcklund symmetry method is developed to study Hamilton-Jacobi equations which admit second order conditional Lie-Bäcklund symmetries. For certain equations, symmetry reductions and exact solutions to the resulting equations are obtained.

Keywords: Hamilton-Jacobi equations; conditional Lie-Bäcklund symmetry; solutions

Received: 27 Nov 2008. **Accepted:** 07 Sep 2010.
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10671156); the Natural Science Foundation of Northwest University (NC0922).